Métodos Numéricos	DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN	Nombre y Apellido:
2do Cuatrimestre 2023		Libreta Universitaria:
2do Parcial (08/11/2023)		Total de hojas entregadas (sin enunciado): 4

Puntajes por resolución de ejercicios y condiciones generales de corrección				
Ej. 1 28	Ej. 2 28	Ej. 3 24	Ej. 4 20	Final 100 Ap
☐ El examen se aprueba con 60 puntos. ☐ Resolver los ejercicios en hojas separadas. ☐ Completar nombre en las hojas. ☐ Completar LU y nombre en el enunciado.		**Justificar <u>todas</u> las respuestas** Puede hacerlo citando resultados de la teórica o la práctica. Para ejercicios de la guía, consulte.		

Ejercicio 1 (28 puntos). Sea $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tal que $P = P^2$ y sea S_λ el autoespacio asociado al autovalor λ.

a) (6 puntos) Probar que todos los autovalores de P son 0 ó 1.

b) (8 puntos) Demostrar que $S_0 = Nu(P)$ y que $S_1 = Im(P)$.

c) (14 puntos) Probar que P es diagonalizable.

Ejercicio 2 (28 puntos). Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $A = U\Sigma V^t$ su descomposición en valores singulares y además $rg(A) = n$. Supongamos que existen $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ triangular superior tal que $A = QR$.

a) (4 puntos) Probar que A y R tienen los mismos valores singulares.

b) (14 puntos) Demostrar que si $Q = U$ entonces R y V son diagonales.

c) (10 puntos) Dar un contraejemplo de (b) para el caso en que $rg(A) < n < m$.

Ejercicio 3 (24 puntos). Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y un sistema de ecuaciones asociado $Ax = b$. Considerando una descomposición SVD de A, $A = U\Sigma V^t$ con $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ valores singulares siendo $r = rg(A)$, se propuso el siguiente esquema iterativo para un $w \in \mathbb{R}$ no nulo:

$$x^{(k+1)} = V(I - \tfrac{1}{w}\Sigma)V^t x^{(k)} + \tfrac{1}{w} V U^t b$$

a) (10 puntos) Pruebe que si el esquema iterativo converge, entonces lo hace a una solución del sistema.

b) (14 puntos) Determinar todos los valores de w para que el sistema converja con cualquier valor inicial (*Sugerencia:* para el análisis, separar en casos $w > 0$ y $w < 0$). Considerar también $r=n$ y $r<n$ [illegible]

Ejercicio 4 (20 puntos). Se miden los siguientes puntos en $\mathbb{R}^3$:

x	-1	-1	0	0	1	2	2	2
y	-1	0	0	1	0	0	-1	1
f	-3	-1	2	-5	-9	2	0	3

a) (15 puntos) Obtener el plano en $\mathbb{R}^3$ que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos.

b) (5 puntos) Calcular el error cometido en el sentido de cuadrados mínimos.

28/28

Ejercicio 1

a) Sea v un ~~autovalor~~ autovector de P ($v \neq 0$ por definición) y λ su autovalor asociado, por lo que $v \in S_\lambda$

Quiero ver cuáles son los posibles valores de λ

$$Pv = \lambda v \Longrightarrow \underbrace{P^2}_{=P} v = P\lambda v \Longrightarrow Pv = \lambda (\overbrace{Pv}^{=\lambda v}) \Longrightarrow \lambda v = \lambda^2 v \quad *$$

* Como v es el mismo vector y $v \neq 0$ debe cumplirse la igualdad, entonces debe cumplirse que $\lambda = \lambda^2$: Caso $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Rightarrow 1 = \frac{\lambda^2}{\lambda} \Rightarrow 1 = \lambda$

Caso $\lambda = 0 \Rightarrow 0 = 0$, se cumple siempre.

Luego, tanto $\lambda = 0$ como $\lambda = 1$ son los autovalores posibles para la matriz P

b) Sobre el núcleo de P: me fijo que pasa con los vectores que pertenecen a S_0.

$v_0 \in S_0 \Rightarrow Pv_0 = 0 \cdot v_0 = 0$, por lo que $S_0 \subseteq Nu(P)$

Faltaría ver que vale la vuelta, o sea que $Nu(P) \subseteq S_0$

Sea $x \in Nu(P) \Rightarrow Px = 0$ lo que puedo reescribir como $Px = 0 \cdot x = 0$. Por lo tanto, todo $x \in Nu(P)$ pertenece a S_0, o sea, $Nu(P) \subseteq S_0$

Por lo tanto, $Nu(P) = S_0$

Falta ver que pasa con la Imagen. Primero veo que $S_1 \subseteq Im(P)$:

$v_1 \in S_1 \Rightarrow Pv_1 = v_1$, por lo tanto, todo $v_1 \in S_1$ forma parte de la $Im(P)$.

Ahora quiero ver que $Im(P) \subseteq S_1$

Sea $x \neq 0$ tq $Px = y$, o sea que $y \in Im(P)$

$Px = y \Rightarrow PPx = Py \Rightarrow P^2x = Py \Rightarrow Px = Py \Rightarrow y = Py$ que puedo reescribir como $Py = 1 \cdot y$

Luego, como P manda todo vector en su imagen a sí mismo,

Por lo tanto, por la reescritura anterior mostrado $y \in Im(P)$ es autovector de P, o sea que $y \in S_1$, quedando $Im(P) \subseteq S_1$

Finalmente $Im(P) = S_1$

c) Utilizando una definición de la teórica, una matriz es diagonalizable $\Longleftrightarrow$ tiene una base de autovectores

Voy a demostrar esto último para mostrar que P es diagonalizable.

Para ello divido en 3 casos, cada uno según ~~los~~ ~~datos~~ el valor de los autovalores:

~~$\lambda = 0$ único autoval:~~

~~Por lo tanto~~, Por el inciso anterior, $S_0 = Nu(P)$ y $S_1 = Im(P)$. Puedo entonces reescribir el teorema de la dimensión: $n = dim(Nu(P)) + dim(Im(P))$ como $n = dim(S_0) + dim(S_1)$

Caso $\lambda=0$ único autoval

$\Rightarrow n = dim(S_0) + dim(S_1)$ $\hookrightarrow$ será 0 porque 1 no es autovalor.

$\therefore n = dim(S_0)$, por lo que ~~todo~~ ~~R^n~~ todo $x \in \mathbb{R}^n$ es también autovector con $\lambda=0$ de P.

Por lo que puedo tomar una base de $\mathbb{R}^n$ ~~de autovec~~ ~~diagonalizable~~ (que es base de S_0) y haciendo que P sea diagonalizable. ✓

Caso $\lambda=1$ único autovalor

$\Rightarrow n = dim(S_0) + dim(S_1)$ así

$\hookrightarrow$ será 0 porque 0 no es autovalor

$\therefore n = dim(S_1)$, por lo que todo $x \in \mathbb{R}^n$ es autovector con $\lambda=1$ de P

Por lo que puedo tomar una base de $\mathbb{R}^n$, (que es también base de S_1) haciendo que P sea diagonalizable ✓

Caso con $\lambda=0$ y $\lambda=1$

Para este caso, sabiendo que $S_0 = Nu(P)$, puedo tomar una base de $Nu(P)$, que también será base de S_0, por lo que puedo formar una base de autovectores con $\lambda=0$. Sabiendo además que $Im(P) = S_1$, entonces puedo tomar una base de la imagen de P que será también base de ~~M~~ S_1

~~Caso $\lambda=0$ y $\lambda=1$ son autovalores diferentes, entonces por el ejercicio ... y ... de la guía 5~~

~~puedo afirmar que $V_0 \in S_0$ y $V_1 \in S_1$ son L.I. ...~~

*y usando que su dim es ?

Quiero ver ahora que ~~...~~ al juntar ambas bases (que es la base de autovectores de P) es también base. Para ello, por ejercicio de la guía 5, ~~como~~ si tengo λ_1 y λ_2 autovalores diferentes, entonces $V_1 \in S_{\lambda_1}$ y $V_2 \in S_{\lambda_2}$ son L.I. Aplicado a este caso con $\lambda=0$ y $\lambda=1$, tengo que todo $V_0 \in S_0$ y $V_1 \in S_1$ son ~~base~~ L.I. Por lo tanto al juntar ambas bases sigo teniendo una base de autovectores haciendo que P sea diagonalizable ✓*

HOJA N°

FECHA

2)

a) $A = U\Sigma V^t$ y $A = QR$

$\Rightarrow R = Q^tA = Q^tU\Sigma V^t$ Tengo una SVD de R: $R = \tilde{U}\Sigma V^t$

con $\tilde{U} = Q^tU$ ortogonal

por producto de ortogonales

y Σ viene de otra SVD

$\Rightarrow$ Valores singulares de A y R

coinciden porque comparten Σ en la SVD y los σ_i son la diagonal de Σ ■

b) $Q = U \Rightarrow R$ y V diagonales

Voy a usar $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangular superior

y $\Sigma = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal. Y como $Rg(A) = n$

hay n valores singulares

no nulos. $\sigma_1, \dots, \sigma_n > 0$

$$A = U \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} V^t = U \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (Q = U)$$

$$\Rightarrow U^tA = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} V^t = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mirando la segunda parte:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} V^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} V^t}^{\Delta \text{ SUP}} = \overbrace{R_1}^{\Delta \text{ SUP}}$$

$\begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} V^t$ es Δ sup y $\begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 v_1^t \\ \vdots \\ \sigma_n v_n^t \end{pmatrix}$ con $\sigma_1, \dots, \sigma_n > 0$ $\Rightarrow V^t$ debe ser Δ sup, sino habría elementos no nulos debajo de diag

Y V^t es ortogonal y triangular superior $\Rightarrow \underbrace{C_i(V^t)}_{\text{Columna } i} = \pm e_i$ (Ej. de la práctica QR Ej 7) → vector

$\Rightarrow V^t$ es diagonal

Y $\begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix} V^t = R_1$ es diagonal por producto de diagonales

$\Rightarrow R_1$ diagonal y $\begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ diagonal ■

Le doy los puntos a él entonces

NOTA

c) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Con $m = 3$ $n = 2$ $Rg(A) = 1$

$Rg(A) < n < m$

Busquemos SVD:

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ Con } \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \text{ y } \begin{matrix} (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \\ (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \end{matrix} \text{ Asociados}$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ Ortogonal}$$

$$A = U \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{Pero } \Sigma V^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \Rightarrow U = I$$

$$A = I \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Y además $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es triangular sup $\Rightarrow A = I \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = QR$

$\Rightarrow Q = U = I$ Son iguales

Pero $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es diagonal y $V^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ no es diagonal

NOTA

Ejercicio 3

a) Quiero ver que cuando la sucesión $x^{(k+1)} = \overbrace{V(I-\frac{1}{w}\Sigma)V^t}^{R} x^{(k)} + \overbrace{\frac{1}{w}VU^t b}^{C}$

tiende a infinito, entonces resuelve el sistema $Ax=b$ con $A=U\Sigma V^t$

$\lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = x^* \;\therefore\; x^* = V(I-\frac{1}{w}\Sigma)V^t x^* + \frac{1}{w}VU^t b$

$\iff x^* = \underbrace{VV^t}_{I} x^* - \frac{1}{w}V\Sigma V^t x^* + \frac{1}{w}VU^t b \iff x^* = x^* - \frac{1}{w}\underset{n\times n}{V}\,\overset{\text{Identidad de } n\times n}{I}\,\Sigma V^t x^* + \frac{1}{w}VU^t b$

$\iff 0 = -\frac{1}{w}\left(-V\underbrace{U^tU}_{I}\overbrace{\Sigma V^t}^{=A}x^* + VU^t b\right) \iff 0 = -VU^tAx^* + VU^t b$

$\iff 0 = VU^t(-Ax^*+b)$ Como V^t y U son ortogonales, entonces VU^t también lo es. Luego es inversible, por lo tanto la única manera de anular el resultado es si $(-Ax^*+b)=0$

$\implies -Ax^*+b=0 \iff Ax^*=b$

Por lo tanto, si el sistema converge, lo hace a una solución de $Ax=b$

b) Como el sistema tiene la forma $x^{k+1} = Rx^k + C$, entonces el sistema convergerá para cualquier x^0 inicial sii $\rho(R)<1$, siendo $\rho(R)$ el radio espectral.

O sea, ~~quiero probar~~ utilizo esto último para demostrar la convergencia.

~~$R=V(I-\frac{1}{w}\Sigma)$~~ Para ello, como el radio espectral es el ~~elemento~~ autovalor en módulo mayor a todos los otros, o sea, $|\lambda_{max}| > |\lambda_i|$ (sin cota mayor) entonces puedo demostrar que todos

idea clave

los autovalores en módulo son menores ~~que~~ a 1.

Faltaría saber sus autovalores. Como $R = V(I-\frac{1}{w}\Sigma)V^t$ tiene la forma $A=S^{-1}BS$ de semejanza pues V es la inversa de V^t, $\Rightarrow R$ es semejante a la matriz $I-\frac{1}{w}\Sigma$, lo que quiere decir que tiene los mismos autovalores, por lo que me fijo cuáles son

Divido los casos: $r<n$ y $r=n$ para ver la forma de la matriz $I - \frac{1}{w}\Sigma$

$r<n$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{w}\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\sigma_1}{w} & & & & & \\ & 1-\frac{\sigma_2}{w} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1-\frac{\sigma_r}{w} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1_{n\times n} \end{pmatrix}$$

Si $r=n$, la forma de la matriz es $\begin{pmatrix} 1-\frac{\sigma_1}{w} & & & \\ & 1-\frac{\sigma_2}{w} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-\frac{\sigma_n}{w} \end{pmatrix}$ (nota: que no están los 1)

Para ambos casos, los autovalores de esa matriz serán los elementos de su diagonal

Con $r<n$ serán entonces $\{ \underbrace{1-\frac{\sigma_1}{w}, 1-\frac{\sigma_2}{w}, 1-\frac{\sigma_r}{w}}_{1}, \underbrace{1, \dots 1}_{2} \}$ y para $r=n$ serán $\{ \underbrace{1-\frac{\sigma_1}{w}, 1-\frac{\sigma_2}{w}, \dots 1-\frac{\sigma_n}{w}}_{1} \}$

Me fijo ahora que cada uno sea menor a 1 en módulo

Primero lo hago para ~~ambos~~ con los autovalores que dependen de los valores singulares de A (los reconstruido como 1)

$\left|1 - \frac{\sigma_i}{w}\right| < 1 \iff -1 < 1 - \frac{\sigma_i}{w} < 1 \iff -2 < -\frac{\sigma_i}{w} < 0 \quad 2 \geq \frac{\sigma_i}{w} \geq 0$ (Este análisis sirve para ambos casos)

Con $1 \leq i \leq r$

Divido los casos: $w<0$ y $w>0$

→ $w<0$: $2w < \sigma_i < 0$ Absurdo, pues ningún valor singular puede ser menor a 0 por definición

$w>0$ $2w \geq \sigma_i \geq 0$ → siempre se cumple por definición de valores singulares $\overset{*}{\iff} \frac{\sigma_i}{2} \leq w \overset{*}{\Rightarrow} \frac{\sigma_1}{2} \leq w$

~~Como $0 \leq \sigma_r \leq \dots \leq \sigma_1 \Rightarrow \frac{\sigma_r}{2} \leq \dots \leq \frac{\sigma_1}{2}$, por lo tanto, $\frac{\sigma_1}{2} \leq w$~~

$(* \Leftarrow)$ Como $0 \leq \sigma_r \leq \dots \leq \sigma_1 \Rightarrow \frac{\sigma_r}{2} \leq \dots \leq \frac{\sigma_1}{2} \leq w$, por lo tanto; w es mayor a todo ~~otro~~ $\frac{\sigma_i}{2}$, valiendo la vuelta

Por lo tanto, los autovalores de 1 cumplen la condición, faltan ver los de 2, que a simple vista se nota que son iguales a 1, por lo que para $r<n$ no existe w para que el sistema converja, pues $\rho(R) \geq 1$

Por otro lado, para $r=n$, ~~el sistema convergerá~~ como todos sus autovalores son de la forma 1, tienen los de R todavía esa forma y por lo tanto $\rho(R) < 1 \iff \frac{\sigma_1}{2} \leq w$

$w>0$ se cumple pues $\sigma_1 > 0$. Luego, el sistema converge $\forall x^0$ inicial

5/6
8/11/2023

h)

PLANO $\quad z = ax + by + d$

Quiero encontrar una matriz A para usar ecuaciones normales

$$A^tA\,x = A^t c$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mi } x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix}$$

Mi c
y encontrado la sol

$$c = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \\ -9 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^t A x = \begin{pmatrix} 15 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15a + b + 5d \\ a + 4b \\ 5a + 8d \end{pmatrix}$$

$$A^t c = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \\ -9 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$A^t A x = A^t c$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 15a + b + 5d \\ a + 4b \\ 5a + 8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ① & 15a + b + 5d = 5 \\ ② & a + 4b = 1 \\ ③ & 5a + 8d = -11 \end{cases}$$

resuelvo el sistema de ecuaciones

de ① tengo que $a = 1 - 4b$

reemplazo en ③ $5(1-4b) + 8d = -11$

$5 - 20b + 8d = -11$

$-20b + 8d = -16$

$-20b = -16 - 8d$

$b = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} d$

¡La materia provee métodos para no tener que despejar ecuaciones!

reemplazando en ① $15\left(1 - 4\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5} d\right)\right) + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} d + 5d = 5$

$15 - 15\left(\frac{16}{5} + \frac{8}{5} d\right) + \frac{4}{5} + \frac{27}{5} d = 5$

$15 - 48 - 24d + \frac{4}{5} + \frac{27}{5} d = 5$

$-\frac{93}{5} d = \frac{186}{5} \Rightarrow \boxed{d = -2}$

$\boxed{b = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \cdot (-2) = 0}$

$\boxed{a = 1 - 4b = 1}$

6/6
8/11/2023

Luego el plano que mejor aproxima es

$$\boxed{z = x - 2}$$

ok

B

b)

El error es $\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i, y_i) - f_i\right)^2$

Si $f(x_i, y_i) = x-2$

$n = 8$

$$\Rightarrow (-3-(-3))^2 + (-3-(-1))^2 + (-2(-2))^2 + (-2-(-5))^2 + (\cancel{4}^{\,-1}-(-9))^2$$

$$+ (0-2)^2 + (0-0)^2 + (0-3)^2$$

$$= 0 + 4 + 16 + 9 + 64 + 4 + 9$$

$$\boxed{= 106}$$

B

Con el plano $z = x-2$ el error cometido es 106